3Д

УДК 65.011.56

А.И. Долгов, Д.А. Короченцев, В.В. Преснухин
Ростовский военный институт ракетных войск, г. Ростов-на-Дону, Россия.
dendd80@mail.ru

О применимости возможностных и вероятностных нечетких чисел

Обосновывается вывод о том, что в системах принятия решений с использованием нечетких чисел, при формировании которых учитывается существенный объем статистических данных, целесообразен переход от возможностной модели описания и обработки нечетких чисел к вероятностной модели, предусматривающей использование нечетких нормально распределенных чисел.

Введение

В дальнейшем рассматривается получение и обработка данных, используемых при реализации процесса принятия решений, представленных нечеткими вероятностными числами и нечеткими возможностными числами, получаемыми в результате обработки различных объемов статистических данных.

Как известно, при формировании нечетких чисел на основе малой статистики наиболее подходящей является возможностная модель их описания в виде нечётких возможностных чисел с использованием при обработке таких чисел методов теории нечетких множеств.

Если же нечеткие числа формируются на основе большой статистики, наиболее подходящей оказывается вероятностная модель их описания в виде нечётких вероятностных чисел с использованием при обработке таких чисел методов теории вероятностей.

Авторами при исходных данных, соответствующих «истине» и описанных в двух видах – нечеткими возможностными числами и нечеткими вероятностными числами, было показано [1], что сложение нечетких возможностных чисел в соответствии с принципом обобщения [2], используемым в теории нечетких множеств, вносит большую относительную ошибку в представление степени размытости результата по сравнению с результатом сложения, получаемым методами теории вероятности, приводящими в условиях истинности исходных данных к абсолютно корректному результату.

Из этого следует, что в условиях большой статистики применимость возможностных чисел и методов их обработки в реальных системах принятия решений должна быть поставлена под сомнение.

С другой стороны, при малой статистике вероятностная модель оказывается не соответствующей истине и наиболее адекватной оказывается возможностная модель.

В условиях неприменимости нечетких возможностных чисел при большой статистике и нечетких вероятностных чисел при малой статистике наиболее простым вариантом обеспечения приемлемой для практики точности вычислений при использовании нечётких чисел в системах принятия решений является альтернативный выбор между возможностной и вероятностной моделями.

Следует принять во внимание тот факт, что процесс сбора информации в реальных системах принятия решений осуществляется профессиональными методами, при этом используется большое количество источников данных, применяются различные методы

экспертного оценивания и инструментальные средства измерения с широким привлечением методов статистической обработки данных. В этих условиях наиболее целесообразным представляется использование для описания и обработки нечётких чисел вероятностных методов.

Описание и обработка нечетких вероятностных чисел

Ввиду того, что численные результаты измерения, получаемые в условиях влияния множества случайных факторов, распределены по нормальному закону [3], в качестве вероятностной функции принадлежности при описании обрабатываемых нечётких чисел наиболее целесообразно использовать именно нормальный закон, а также его модификации.

В дальнейшем нечёткие вероятностные числа с функцией принадлежности, описываемой нормальным законом и его модификациями, будем называть нормально распределёнными числами.

По аналогии с тем, что нечеткие числа, используемые в практических приложениях теории нечетких множеств, чаще всего имеют ограниченную область определения функции принадлежности (например: треугольные, трапециидальные и т.д.) [2], введём в рассмотрение нормально распределённые числа с функцией принадлежности в виде ограниченного нормального закона, отличающегося от известного усечённого нормального закона [3] тем, что в результате преднамеренного линейного преобразования значения функция принадлежности в граничных точках области её определения приравнивается к нулю.

Кроме того, так как умножение нечётких симметричных возможностных чисел приводит к результату, являющемуся несимметричным числом, целесообразно введение в рассмотрение нормально распределённых чисел с функциями принадлежности в виде ассиметричного (неограниченного) нормального закона и ограниченного ассиметричного нормального закона.

С целью описания различных модификаций нормально распределённого числа $\widetilde{X}$ (с функциями принадлежности, описываемыми как неограниченным, так и ограниченным нормальным законом, который может быть как симметричным, так и ассиметричным) введем следующее обобщенное обозначение:

$$\widetilde{X}_p(g_{Xl}, g_{Xn}, \sigma_{Xl}, m_X, \sigma_{Xp}, g_{Xv}, g_{Xp}) =$$

$$= \bigcup_{g_{Xl}}^{m_X} \frac{f_{X_1}(x)}{\int\limits_{g_{Xl}}^{m_X} f_{X_1}(x)dx + \int\limits_{m_X}^{g_{Xp}} f_{X_2}(x)dx} dx \cup \bigcup_{m_X}^{g_{Xp}} \frac{f_{X_2}(x)}{\int\limits_{g_{Xl}}^{m_X} f_{X_1}(x)dx + \int\limits_{m_X}^{g_{Xp}} f_{X_2}(x)dx} dx,$$

где: $$f_{X_1}(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\frac{(g_{Xl}-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}}}{\int\limits_{g_{Xl}}^{g'_{Xp}} (e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\frac{(g_{Xl}-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}})dx};$$

$$f_{X_2}(x)=\frac{(1-e^{-\frac{(g_{Xl}-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}})\cdot(e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xp}^2}}-e^{-\frac{(g'_{Xl}-m_X)^2}{2\sigma_{Xp}^2}})}{(1-e^{-\frac{(g'_{Xl}-m_X)^2}{2\sigma_{Xp}^2}})\cdot\int\limits_{g_{Xl}}^{g'_{Xp}}(e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}}-e^{-\frac{(g_{Xl}-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}})dx};$$

$\bigcup\limits_{m_X}^{g_{Xl}} f(x)dx$ – объединение значений функции принадлежности, соответствующих бесконечно малым значениям dx;

$\cup$ – объединение составных частей нечеткого числа $\widetilde{X}$;

m_X – чёткое частное значение нечеткого числа $\widetilde{X}$, соответствующее максимуму значения функции принадлежности;

σ_{Xl} (σ_{Xp}) – величина среднего квадратического отклонения нормального закона, описывающего возрастающую (убывающую) часть функции принадлежности, характеризующей степень размытости нормально распределённого числа $\widetilde{X}$;

g_{Xl} $\left(g_{Xp}\right)$ – левая (правая) граница области определения модифицируемого нормального закона, порождающего возрастающую (убывающую) часть функции принадлежности;

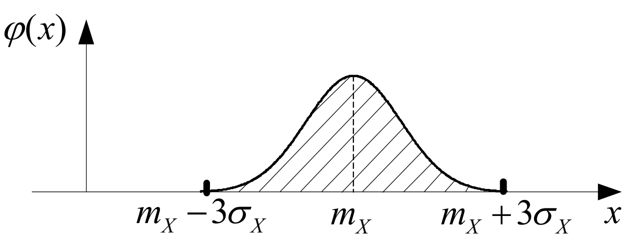
g_{Xn} $\left(g_{Xv}\right)$ – нижняя (верхняя) граница области определения возрастающей (убывающей) части функции принадлежности.

Нормально распределённому числу с функцией принадлежности в виде ограниченного (симметричного) нормального закона соответствуют значения $g_{Xn}=m_X-3\sigma_X$; $g_{Xv}=m_X+3\sigma_X$; $g_{Xl}=m_X-3\sigma_X$; $g_{Xp}=m_X+3\sigma_X$; $\sigma_{Xl}=\sigma_{Xp}=\sigma_X$, при которых

$$\widetilde{X}_p(m_X-3\sigma_X,m_X-3\sigma_X,\sigma_X,m_X,\sigma_X,m_X+3\sigma_X,m_X+3\sigma_X)=$$

$$=\bigcup\limits_{m_X-3\sigma_X}^{m_X+3\sigma_X}\frac{e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}-e^{-\frac{9}{2}}}{\int\limits_{m_X-3\sigma_X}^{m_X+3\sigma_X}\left(e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}-e^{-\frac{9}{2}}\right)dx}\,dx. \qquad (1)$$

Графически рассматриваемое число иллюстрируется рис. 1.



$$\widetilde{X}(m_X-3\sigma_X,m_X-3\sigma_X,\sigma_X,m_X,\sigma_X,m_X+3\sigma_X,m_X+3\sigma_X)$$

Рисунок 1 – Графическое представление ограниченного нормально распределённого числа

Нормально распределённому числу с функцией принадлежности в виде ассиметричного нормального закона соответствуют $g_{Xl} = -\infty$; $g_{Xp} = \infty$; $g_{Xn} = -\infty$; $g_{Xv} = \infty$; $\sigma_{Xl} \neq \sigma_{Xp}$, при этом

$$\widetilde{X}_p(-\infty, -\infty, \sigma_{Xl}, m_X, \sigma_{Xp}, \infty, \infty) =$$

$$= \bigcup_{-\infty}^{m_X} \frac{e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}}}{\int\limits_{-\infty}^{m_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} dx + \int\limits_{m_X}^{\infty} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xp}^2}} dx} dx \cup \bigcup_{m_X}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xp}^2}}}{\int\limits_{-\infty}^{m_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} dx + \int\limits_{m_X}^{\infty} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xp}^2}} dx} dx . \qquad (2)$$

Описываемое соотношением (2) нормально распределённое число иллюстрируется рис. 2.

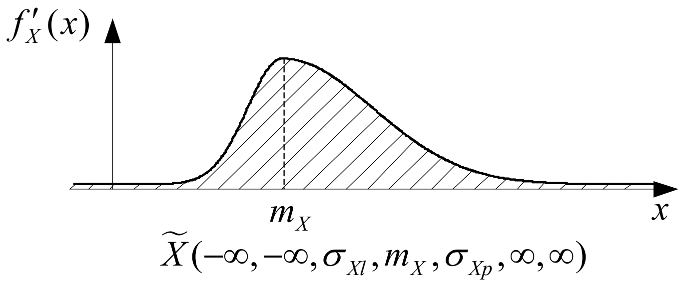


Рисунок 2 – Графическое представление
неограниченного ассиметричного нормально распределённого числа

Нормально распределённому числу с функцией принадлежности в виде ограниченного ассиметричного нормального закона соответствуют значения $g_{Xl} = m_X - 3\sigma_{Xl}$; $g'_{Xp} = m_X + 3\sigma_{Xl}$; $g_{Xp} = m_X + 3\sigma_{Xp}$; $g_{Xn} = m_X - 3\sigma_X$; $g_{Xv} = m_X + 3\sigma_X$; $\sigma_{Xl} \neq \sigma_{Xp}$, при которых

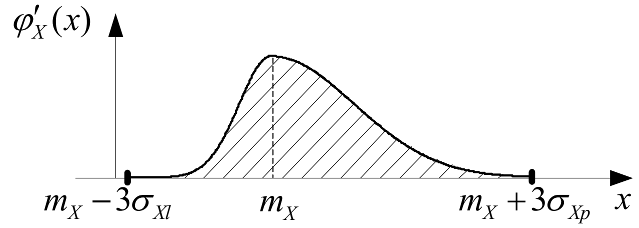
$$\widetilde{X}_p(m_X - 3\sigma_{Xl}, m_X - 3\sigma_{Xl}, \sigma_{Xl}, m_X, \sigma_{Xp}, m_X + 3\sigma_{Xp}, m_X + 3\sigma_{Xp}) =$$

$$= \bigcup_{m_X - 3\sigma_{Xl}}^{m_X} \frac{\dfrac{e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)}}{\int\limits_{m_X-3\sigma_{Xl}}^{m_X+3\sigma_{Xl}} \left(e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)} \right) dx}}{\int\limits_{m_X-3\sigma_{Xl}}^{m_X} \dfrac{e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)}}{\int\limits_{m_X-3\sigma_{Xl}}^{m_X+3\sigma_{Xl}} \left(e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)} \right) dx} dx + \int\limits_{m_X}^{m_X+3\sigma_{Xp}} \dfrac{(e^{-\frac{(m_X-x)^2}{2\sigma_{Xp}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)})}{C \cdot \sigma_{Xl}} dx} dx \cup$$

$$\cup \bigcup_{m_X}^{m_X+3\sigma_{Xp}} \frac{\dfrac{(e^{\frac{(m_X-x)^2}{2\sigma_{Xp}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)})}{C\cdot\sigma_{Xl}}}{\displaystyle\int_{m_X-3\sigma_{Xl}}^{m_X} \frac{e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)}}{\displaystyle\int_{m_X-3\sigma_{Xl}}^{m_X+3\sigma_{Xl}} \left(e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_{Xl}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)} \right) dx} dx + \int_{m_X}^{m_X+3\sigma_{Xp}} \frac{(e^{\frac{(m_X-x)^2}{2\sigma_{Xp}^2}} - e^{-\left(\frac{9}{2}\right)})}{C\cdot\sigma_{Xl}} dx} dx, \qquad (3)$$

где $C = erf\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{2\pi} - 6\cdot e^{-\left(\frac{9}{2}\right)} \approx 2.433$.

Графически рассматриваемое число представлено на рис. 3.



$$\widetilde{X}(m_X - 3\sigma_{Xl}, m_X - 3\sigma_{Xl}, \sigma_{Xl}, m_X, \sigma_{Xp}, m_X + 3\sigma_{Xp}, m_X + 3\sigma_{Xp})$$

Рисунок 3 – Графическое представление
ограниченного ассиметричного нормально распределённого числа

В качестве методов обработки нормально распределённых чисел должны быть использованы методы теории вероятностей. В [3] описан метод нахождения закона распределения суммы двух случайных величин, подходящий для получения результата сложения для двух нечетких нормально распределенных чисел в аналитическом виде.

При сложении нормально распределенных чисел с функциями принадлежности в виде ограниченного (симметричного) нормального закона, а также неограниченного и ограниченного ассиметричного нормальных законов получение результата операции в аналитическом виде не представляется возможным. Кроме того, для нормально распределенных чисел не может быть аналитически описано получение результата умножения.

В связи с этим были разработаны, описаны математически и программно реализованы процедуры сложения и умножения (при которых как исходные, так и результирующие операнды, могут являться симметричными и несимметричными, неограниченными и ограниченными нормально распределёнными числами), основанные на предложенном авторами дискретном методе аппроксимации результата операции, предусматривающим реализацию следующих действий:

1. Переход от непрерывного описания нечётких чисел, являющихся исходными операндами, к их дискретному описанию функциями принадлежности в точках с задаваемым шагом дискретизации.

2. Получение (с использованием методов теории вероятностей) для значений функций принадлежности, определяемых в дискретных точках исходных операндов, значений функции принадлежности результата операции, описываемого нечётким дискретным числом.

3. Определение для полученного нечеткого дискретного числа чёткого значения m_Z, соответствующего максимуму значения его дискретной функции принадлежности.

4. Нахождение начальных значений $\sigma_{Zl,0}$, $\sigma_{Zp,0}$ методом, описанным в [2, с. 146] (в который были внесены некоторые изменения с учетом используемых ограничений)

4.1. На основе значений функции принадлежности в дискретных точках полученного результата определение среднего квадратического отклонения $\sigma_{Zl,0}$ для возрастающей части аппроксимирующей непрерывной функции принадлежности:

4.1.1. Определение границ $\left[g_{Zl}, m_Z\right]$ области определения возрастающей части функции принадлежности;

4.1.2. Дополнение возрастающей части функции принадлежности симметричной ей относительно оси ординат, проходящей через точку m_Z, убывающей частью функции принадлежности;

4.1.3. Определение искомой величины среднего квадратического отклонения $\sigma_{Zl,0}$, характеризующей степень размытости возрастающей части дискретной функции принадлежности.

4.2. На основе значений функции принадлежности в дискретных точках результата операции получение среднего квадратического отклонения $\sigma_{Zp,0}$ для убывающей части аппроксимирующей непрерывной функции принадлежности:

4.2.1. Определение границ $\left[m_Z, g_{Zp}\right]$ области определения убывающей части функции принадлежности;

4.2.2. Дополнение убывающей части функции принадлежности симметричной ей относительно оси ординат, проходящей через точку m_Z, возрастающей частью функции принадлежности;

4.2.3. Определение величины среднего квадратического отклонения $\sigma_{Zp,0}$, характеризующей степень размытости убывающей части дискретной функции принадлежности.

4.3. Аппроксимация результата операции, описываемого нечётким дискретным числом, нечетким непрерывным нормально распределённым числом с обеспечением того, что бы максимумы значений убывающей и возрастающей частей результирующей функции принадлежности были равны друг другу и интегральное значение полной суммы вероятностей было равным единице.

5. Формирование методом последовательных приближений значений $\sigma_{Zl,i}$ и $\sigma_{Zp,i}$, при которых ошибка аппроксимации дискретного результата непрерывным нормально распределённым числом является минимальной.

6. Получение аналитического выражения для окончательного результата, представляемого непрерывным нормально распределённым числом вида $\widetilde{X}_p(g_{Xl}, g_{Xn}, \sigma_{Xl}, m_X, \sigma_{Xp}, g_{Xv}, g_{Xp})$.

Заключение

Нечеткие возможностные и вероятностные числа, наряду с достоинствами, обладают недостатками: возможностные числа приводят к резкому возрастанию ошибки описания степени размытости при увеличении статистики, а нечеткие вероятностные числа не применимы при малой статистике.

В системах принятия решений с процессами сбора информации, реализуемыми профессиональными методами статистической обработки данных, при альтернативном выборе между возможностной и вероятностной моделями описания и обработки нечётких чисел предпочтительно использование вероятностной модели.

В качестве функции принадлежности при описании обрабатываемых нечётких вероятностных чисел целесообразно использование нормального закона и его модификаций (ограниченный, ассиметричный и ограниченный ассиметричный нормальные законы), что приводит к использованию чисел, которые могут быть условно названы нормально распределёнными.

Получение результата сложения и умножения нормально распределённых чисел различных модификаций осуществимо с использованием дискретного метода аппроксимации.

Литература

1. Долгов А.И., Короченцев Д.А., Преснухин В.В. Сравнительная оценка ошибки сложения возможностных и вероятностных нечетких чисел. 2007 // Материалы Международной научно-технической конференции. – Т.1. – Таганрог: Изд. ТТИ ЮФУ, 2007. – 330 с., с. 234-23.
2. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. – Рига: Зинатне, 1990. – 184 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 5-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 576 с.

A.I. Dolgov, D.A. Korochentsev, V.V. Presnykhin

About Applicability Possibility and Probabilistic Fuzzy Numbers

Is proved the conclusion that in systems of decision-making with use of fuzzy numbers at which formation the essential volume of statistical data is considered, transition from possibility models of the description and processing of fuzzy numbers to the probabilistic model providing use of fuzzy normally distributed numbers is expedient.

А.І. Долгов, Д.А. Короченцев, В.В. Преснухін

Про застосовність можливих та ймовірнісних нечітких чисел

Обгрунтовується висновок про те, що в системах прийняття рішень з використанням нечітких чисел, при формуванні яких враховується істотний об’єм статистичних даних, є доцільним перехід від можливої моделі опису і обробки нечітких чисел до ймовірної моделі, що передбачає використовування нечітких нормально розподілених чисел.

Статья поступила в редакцию 21.07.2008.